

$$r > 0, \quad \vartheta \in (0, 2\pi), \quad z \in \mathbb{R}$$

$$D\Phi(r, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & r \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \det D\Phi(r, \vartheta, z) = r$$

$f \circ \Phi$ = Transf. von f auf Zylinderkoordinaten

→ Übung: $\frac{\partial}{\partial r}(f \circ \Phi) = \dots$, etc

4) Ableitung der Umkehrfunktion (unter viel zu starken Bedingungen):

Es gelte: U, V offen im Raum X ,

$f: U \rightarrow V$ bijektiv und diff'bar in $a \in U$,

f^{-1} diff'bar in $b = f(a) \in V$

$$\Rightarrow \boxed{D(f^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}}$$

↑
Umkehrabb. von $Df(a): X \rightarrow X$

Bew. von 4): die Kettenregel angewendet auf

$$\text{Id} = f^{-1} \circ f$$

ergibt $\text{Id} = D(f^{-1})(f(a)) \circ Df(a)$, denn

$\text{Id}: U \rightarrow U$ ist natürlich überall diff'bar mit Ableitung $\text{Id}: X \rightarrow X$. $\square$

Wir geben nun einige



Einfache Anwendungen: Schrankensatz, Mittelwertsätze



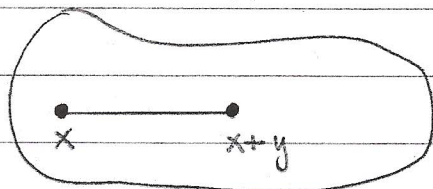
SATZ 19.2: (Analogon zum Hauptsatz)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei einmal

stetig partiell diff'bar. Seien $x, y \in U$ mit $x+ty$

$\in U$ für $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt

$$f(x+y) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x+ty) dt \right) y$$



BEM:1) Integration vektorieller Funktionen $F: [a, b] \rightarrow X$ ($X = \mathbb{R}$ Vektorraum, $\dim X < \infty$) : F integrierbar auf $[a, b]$: $\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{die Komponenten } F^i \text{ bzgl. irgendeiner Basis } x_1, \dots, x_L \\ \text{von } X \text{ sind integrierbar} \end{array} \right.$$

dann: $\int_a^b F(t) dt := \sum_{i=1}^L \left(\int_a^b F^i(t) dt \right) x_i$

Spezialfall: F ist matrixwertig, also

$$F(t) = \left(a_{ij}(t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

dann:

$$\int_a^b \left(a_{ij}(t) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$$

im Satz ist $\int_0^1 Df(x+ty) dt = \left(\int_0^1 \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x+ty) dt \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$

, und das Integral rechts existiert wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial f^j}{\partial x_i}$,

also der Stetigkeit von $t \mapsto \frac{\partial f^j}{\partial x_i}(x+ty)$ auf $[0,1]$.

2) zum Begriff der stetigen Diff'barkeit (zunächst für $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$):
wir hatten definiert

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ stetig diff'bar auf } U : \iff \\ \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \text{ sind stetig auf } U \text{ für alle } i=1, \dots, n, j=1, \dots, m \end{array} \right.$$

andernseits: f' ist Abbildung $U \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

von U in den Raum der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ wurde mit irgendeiner Norm versehen (z.B.

Operatornorm oder Euklidische Norm). Dann kann man zeigen:

LEMMA: f sei diff'bar auf U . Dann gilt:

$$\begin{array}{|l} \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \text{ stetig auf } U \text{ für alle } i, j \\ f' \text{ ist stetig auf } U. \end{array} \iff$$

→ Übung!

Ist $f: X \supset U \rightarrow Y$ diff'bar auf U (offen), so wird man

in Anlehnung an das Lemma sagen:

$$f \in C^1(U, Y) \quad (\text{stetig diff'bar auf } U) : \Leftrightarrow$$

$$f' : U \rightarrow L(X, Y) \text{ ist stetig}$$

Mit diesem Konzept läßt sich 19.2 wörtlich auf Räume X, Y übertragen.

Beweis von 19.2: O.E. f reell, also $m = 1$

(sonst Komponentenweise), es ist (Hauptsatz!)

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+ty) dt$$

beachte: $\gamma: t \mapsto x+ty$ ist diff'bar $\Rightarrow$

$$t \mapsto f(\gamma(t)) \quad -''-$$

und (Kettenregel!) $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \frac{d}{dt} \gamma^i(t)$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty) y_i \quad \Rightarrow$$

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ty) y_i dt$$

□

KOROLLAR:

Vor. wie in 19.2, es sei

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+ty) \right)^2 \right)^{1/2}$$

Eukl. Norm von $Df(x+ty)$

Damit gilt :

$$|f(x+y) - f(x)| \leq M \cdot |y| \quad (\text{Schwanksatz})$$

(bgl. Eukl. Normen)

Bew: zeige als

→ Übung: $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^L$ integrierbar $\Rightarrow$

$$\left| \int_a^b F(t) dt \right| \leq \int_a^b |F(t)| dt$$

(Hinweis: $A := \int_a^b F(t) dt$; $|A|^2 = \langle A, A \rangle =$

$$\langle A, \int_a^b F(t) dt \rangle = \int_a^b \langle A, F(t) \rangle dt \leq |A| \int_a^b |F(t)| dt$$

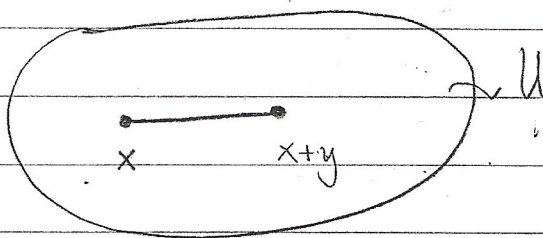
$\uparrow$ Cauchy Schwarz

man wende diese Ungleichung an auf die Formel aus 19.2

□

BEM : "Version des M.W.S." für Funktionen mehrerer Variabler

1)

notwendig
✓

f reellwertig, nur diff'bar auf U (also f' nicht stetig)

$$\Rightarrow f(x+y) - f(x) = \langle \nabla f(z), y \rangle$$

für einen Punkt z auf der Strecke $\overline{x, x+y}$

Beweis: $\gamma(t) := f(x + ty)$, $0 \leq t \leq 1$

MWS $\Rightarrow \exists \vartheta \in [0, 1]$ mit $\gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(\vartheta)$

man beachte: $\gamma'(\vartheta) = Df(x + \vartheta y)(y) = \langle \nabla f(z), y \rangle$,
 $z := x + \vartheta y$

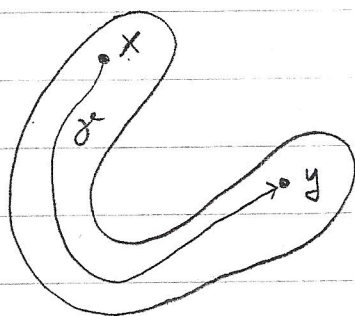
2) sei alles wie in 1), nur f vektorwertig, also $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow f_j(x+y) - f_j(x) = \langle \text{grad } f_j(z_j), y \rangle$$

mit i.a. verschiedenen $z_1, \dots, z_m$ aus $\overline{x, x+y}$.

beachte: $\left\{ \begin{array}{l} \text{gilt} \\ \| \nabla f_j \| \leq M \text{ auf } \overline{x, x+y} \Rightarrow, \text{ so folgt} \\ |f(x+y) - f(x)| \leq \text{const}(M) \cdot |x-y| \\ (\text{Schranksatz}) \end{array} \right.$

3) Seien $x, y \in U$ zwei Punkte, die man in U durch eine differenzierbare Kurve $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ verbinden kann



Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig

differenzierbar

Hauptsatz

$$\Rightarrow f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \int_0^1 Df(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt$$

$\downarrow$ Kettenregel

$$\int_0^1 Df(\gamma(t)) (\gamma'(t)) dt$$

Sei M eine Schranke auf $|Df| \Rightarrow$

$$|f(y) - f(x)| \leq M \cdot \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = M \cdot L(\gamma)$$

Man sieht: je nach Form von U und Lage von x, y kann $L(\gamma)$ sehr viel größer sein als $|x-y|$.

□

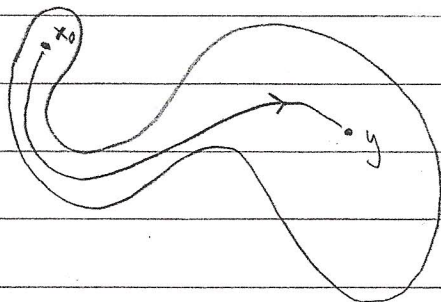
SATZ 19.3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und weg zusammenhängend,

$f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar. Dann gilt:

$$Df(x) = 0 \quad \forall x \in U \iff f \text{ ist konstant}$$

Beweis: " $\Leftarrow$ " klar, gilt für beliebige offene U

" $\Rightarrow$ " falsch, wenn U nicht zshgd. ist: $f \equiv c_1$ $f \equiv c_2$



x_0 beliebiger Punkt aus U

Für alle $y \in U$ existiert eine

diff'bare Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow U$ von x_0 nach $y \xRightarrow{\exists} f(y) - f(x_0) = \int_0^1 Df(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = 0$, also $f(y) = f(x_0)$.

□